Wahrscheinlichkeitstheorie 1

Blatt 1

Aufgabe 1 *(4 Punkte)*
Es sei $\mu \in \mathbb{R}$ sowie $\sigma > 0$ und

$$p(x) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie alle Momente

$$\int_{\mathbb{R}} x^k p(x) \mathrm{d}x, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

sowie alle zentrierten Momente

$$\int_{\mathbb{R}} (x-\mu)^k p(x) \mathrm{d}x, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

Aufgabe 2 *(4 Punkte)*
Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Sei X standardnormalverteilt mit Werten in $\mathbb{R}^d$. Dann gilt $\mathbb{E}(X) = 0$ und $\mathrm{cov}(X_i, X_j) = \delta_{ij}$.

(b) Sei X wie oben und $Y := AX + b$ mit $b \in \mathbb{R}^m$ und A eine reelle $m \times d$-Matrix. Es gilt $\mathbb{E}(Y) = b$ und $\Sigma(Y) = AA^T$.

Aufgabe 3 *(4 Punkte)*
Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln für die Varianz.

1. $\mathrm{var}(aX + b) = a^2 \mathrm{var}(X)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.
2. $\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$.
3. $\mathrm{var}(X) < \infty$ genau dann wenn $X \in \mathcal{L}^2$.
4. $\mathrm{var}(X) = 0$ genau dann wenn $X = \mathbb{E}(X)$ fast sicher.
5. $\Pr(|X - \mathbb{E}(X)| \geq h) \leq \frac{1}{h^2} \mathrm{var}(X)$.
6. $\langle X, Y \rangle := \mathbb{E}(X \cdot Y)$ definiert das Skalarprodukt auf $\mathcal{L}^2$.

7. $\operatorname{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(X \cdot Y) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

8. Für $X, Y \in \mathcal{L}^2$ ist

$$\operatorname{var}(X+Y) = \operatorname{var}(X) + \operatorname{var}(Y) + 2\operatorname{cov}(X,Y).$$

Aufgabe 4 *(4 Punkte)*
Für alle $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0,1]$ und $q = 1-p$ definiere

$$b_{n,p}(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k \in \{0, \dots, n\}.$$

Dann ist die Binomialverteilung zu n und p über $\{0, \dots, n\}$ definiert durch

$$\operatorname{bin}_{n,p}(A) = \sum_{k=0}^{n} b_{n,p}(k)\delta_k(A), \quad A \subset \{0, \dots, n\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\operatorname{bin}_{n,p}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\Omega = \{0, \dots, n\}$ mit $\mathcal{F} = 2^\Omega$ definiert.

(b) Wir wollen das Maß $\operatorname{bin}_{n,p}$ zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$ erweitern. Geben Sie zwei unterschiedliche geeignete σ-Algebren an.

(c) Seien $p, p' \in [0,1]$. In welchen Fällen ist $\operatorname{bin}_{n,p}$ absolut stetig bezüglich $\operatorname{bin}_{n,p'}$?

(d) Berechnen Sie die Radon-Nikodym Ableitung $\frac{\mathrm{d}\operatorname{bin}_{n,p}}{\mathrm{d}\operatorname{bin}_{n,p'}}$ für jene p, p' für die diese existiert.